Lineare Optimierung – eine Anwendung

Dr. Jürgen Faik

- Offenburg, 28.03.2007 -

1. Einleitung

In den kommenden 45 Minuten werde ich meine Gedanken zum Thema „Lineare Optimierung – eine Anwendung“ vortragen.

Ökonomen beschäftigen sich – gemäß dem von ihnen unterstellten Menschenbild des Homo oeconomicus – in vielfältiger Weise mit der Optimierung von Zielgrößen unter Nebenbedingungen. Mikroökonomische Beispiele sind die restringierte Nutzenmaximierung der privaten Haushalte und die restringierte Gewinnmaximierung bzw. die restringierte Kostenminimierung der Unternehmen. Dabei sind Zielfunktionen und Nebenbedingungen nicht notwendigerweise linear in den zugehörigen Parametern und Variablen. So wird typischerweise eine quasi-konkave Nutzenfunktion als Zielfunktion bei der restringierten Nutzenmaximierung unterstellt.

Dennoch existieren in der Ökonomik – wie wir später noch sehen werden – durchaus auch Beispiele für lineare Zielfunktionen und lineare Nebenbedingungen. Dies gilt zumindest für Teilabschnitte der betreffenden Wertebereiche. Es ist also – in gewissen Grenzen – durchaus statthaft, zumindest von näherungsweise linearen ökonomischen Zusammenhängen auszugehen.

Die einzelnen linearen Funktionen, welche zu einem bestimmten ökonomischen Sachzusammenhang gehören, konstituieren dabei ein lineares (Un-)Gleichungssystem. Ein solches ist folglich dadurch charakterisiert, dass sich die Zielsetzung der Entscheidungssituation durch eine lineare Funktion beschreiben lässt und auch die Nebenbedingungen des

Entscheidungsproblems durch lineare (Un-)Gleichungen angegeben werden können. Die Variablen des Gleichungssystems treten nur in der ersten Potenz auf und sind nicht multiplikativ miteinander verknüpft.

Ein analytisches Verfahren zur Lösung eines solchen Systems ist das der linearen Programmierung bzw. der linearen Optimierung. Hierbei ist in der Regel zu beachten, dass die für das jeweilige Problem charakteristischen Variablen ein bestimmtes unteres Niveau (üblicherweise Null) nicht unterschreiten dürfen. Dies ergibt sich z. B. dadurch, dass negative Mengen üblicherweise ökonomisch nicht sinnvoll interpretiert werden können; ähnliches gilt für Geldpreise.

Die lineare Programmierung gehört zusammen mit der Differentialrechnung zur ökonomischen Marginalanalyse, da sie bei der Lösung eines Problems auf die Änderungsraten des Erfolgs einer Niveauänderung der Entscheidungsvariablen abstellt.

Zur Maximierung einer entsprechenden Zielfunktion unter Nebenbedingungen wird vielfach auf den so genannten Simplex-Algorithmus Bezug genommen. Man kann aber auch bis zu einem gewissen Grad – bis zur Dreidimensionalität – eine grafische Lösung wählen. Beide Methoden werden später exemplarisch erläutert. Des Weiteren werden in der Literatur Innere-Punkte-Verfahren, die so genannte Ellipsoidmethode oder die „Ungarische Methode“ zur Lösung korrespondierender Probleme diskutiert. Auf diese Methoden wird hier allerdings nicht näher eingegangen werden.

Ein Maximierungsproblem kann im Übrigen leicht in ein Minimierungsproblem überführt werden. Hierzu ist lediglich die Zielfunktion mit (-1) zu multiplizieren. Sind die Nebenbedingungen anstelle von Kleiner-als-Bedingungen durch Größer-als-Bedingungen charakterisiert, kann dies ebenfalls durch Multiplikation dieser Ungleichungen mit (-1) berücksichtigt werden.

Bekannte Anwendungsbeispiele der linearen Optimierung sind das Routing in Telekommunikations- und Verkehrsnetzen, die Produktionsplanung, Mischungsprobleme sowie spieltheoretisch motivierte Ansätze.

Es ist an dieser Stelle grundsätzlich darauf hinzuweisen, dass nicht jedes lineare System eine Lösung bzw. eine Optimallösung aufweist. Auch dies werden wir später noch kurz erörtern.

2. Grafische Darstellung eines linearen Optimierungsproblems

Die grafische Methode ist, wie oben angedeutet, naheliegenderweise auf ein maximal dreidimensionales Problem beschränkt.

Um die grafische Methode zu illustrieren, sei beispielhaft folgendes Entscheidungsproblem – im zweidimensionalen Raum – gegeben:

Die *Zielfunktion* laute im Sinne der Gewinnmaximierung: Maximiere den Gewinn G auf Grund der Gewinnbeiträge zweier Produkte x_1 und x_2, etwa auf Grund der Gewinnbeiträge von Sonnenschirmen (x_1) und Regenschirmen (x_2):

ZF: $G = 10\ x_1 + 15\ x_2 \rightarrow \max!$

Man kann die Gewinnbeiträge im Sinne von Deckungsbeiträgen deuten.

Pro Sonnenschirm beträgt der Gewinn 10 € und pro Regenschirm 15 €.

Bei der Maximierung der genannten Zielfunktion seien folgende Kapazitätsrestriktionen als Nebenbedingungen (NB) gegeben:

NB I: $5\ x_1 + 3\ x_2 \leq 50$ und

NB II: $3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 72$.

Inhaltlich könnte man diese Nebenbedingungen z. B. so interpretieren, dass sie auf ihren rechten Seiten die in der Dimension Zeit (d. h. z. B. in „Stunden pro Woche“) gemessenen Kapazitätsgrenzen zweier Produktionsfaktoren Arbeit und Maschinen angeben. In dieser Interpretation stünden für die Herstellung der Sonnen- und Regenschirme maximal 50 Stunden pro Woche für den Produktionsfaktor Arbeit und maximal 72 Stunden pro Woche für den Produktionsfaktor Maschinen zur Verfügung.

Für die Herstellung eines Sonnenschirms werden 5 Stunden und für die Herstellung eines Regenschirms 3 Stunden der Arbeitskapazität benötigt. Ferner werden für die Herstellung eines Sonnenschirms 3 Stunden und für die Herstellung eines Regenschirms 6 Stunden der Maschinenkapazität gebraucht.

Sollen beispielsweise 2 Sonnen- und 5 Regenschirme produziert werden, würden insgesamt 25 Stunden der Arbeitskapazität und 24 Stunden der Maschinenkapazität ausgeschöpft:

- 5 Stunden/~~Sonnenschirm~~ * 2 ~~Sonnenschirme~~ + 3 Stunden/~~Regenschirm~~ * 5 ~~Regenschirme~~ = 25 Stunden;
- 3 Stunden/~~Sonnenschirm~~ * 2 ~~Sonnenschirme~~ + 6 Stunden/~~Regenschirm~~ * 5 ~~Regenschirme~~ = 24 Stunden.

In dieser Beispielskonstellation wären also bezüglich des Faktors Arbeit noch 25 (= 50 – 25) Stunden und bezüglich des Faktors Maschinen noch 48 (= 72 – 24) Stunden an Kapazitäten frei.

Ökonomisch besehen, ist in unserem Beispiel die Produktion der beiden Güter Sonnen- und Regenschirme unabhängig voneinander, und zwar in dem Sinne, dass es unerheblich ist, ob sie gleichzeitig oder nacheinander hergestellt werden. Dies bezeichnet man als Additivität. Hinzu kommt gemäß den obigen Formulierungen die implizite Prämisse, dass die jeweilige Produktion in konstanten Proportionen stattfindet. Eine Erhöhung oder Herabsetzung aller Inputs um das λ-fache verändert entsprechend auch die Outputs um das λ-fache. Diese beiden Eigenschaften der konstanten Proportionen und der Additivität konstituieren letztendlich die Linearität des vorliegenden (Produktions-)Systems.

Von den beiden Produkten können natürlich nur nicht-negative Mengen im Rahmen der betreffenden Produktionsprozesse hergestellt werden, so dass des Weiteren die Nichtnegativitätsbedingungen gelten:

$x_1 \geq 0$ und

$x_2 \geq 0$.

Auf der Grundlage der vorstehenden Zusammenhänge werden in einem nächsten Schritt in einem zweidimensionalen Koordinatensystem die beiden Entscheidungsvariablen x_1 (Abszisse) und x_2 (Ordinate) abgetragen. Zunächst werden die hier nach x_2 umgestellten Nebenbedingungen in das Koordinatensystem eingetragen:

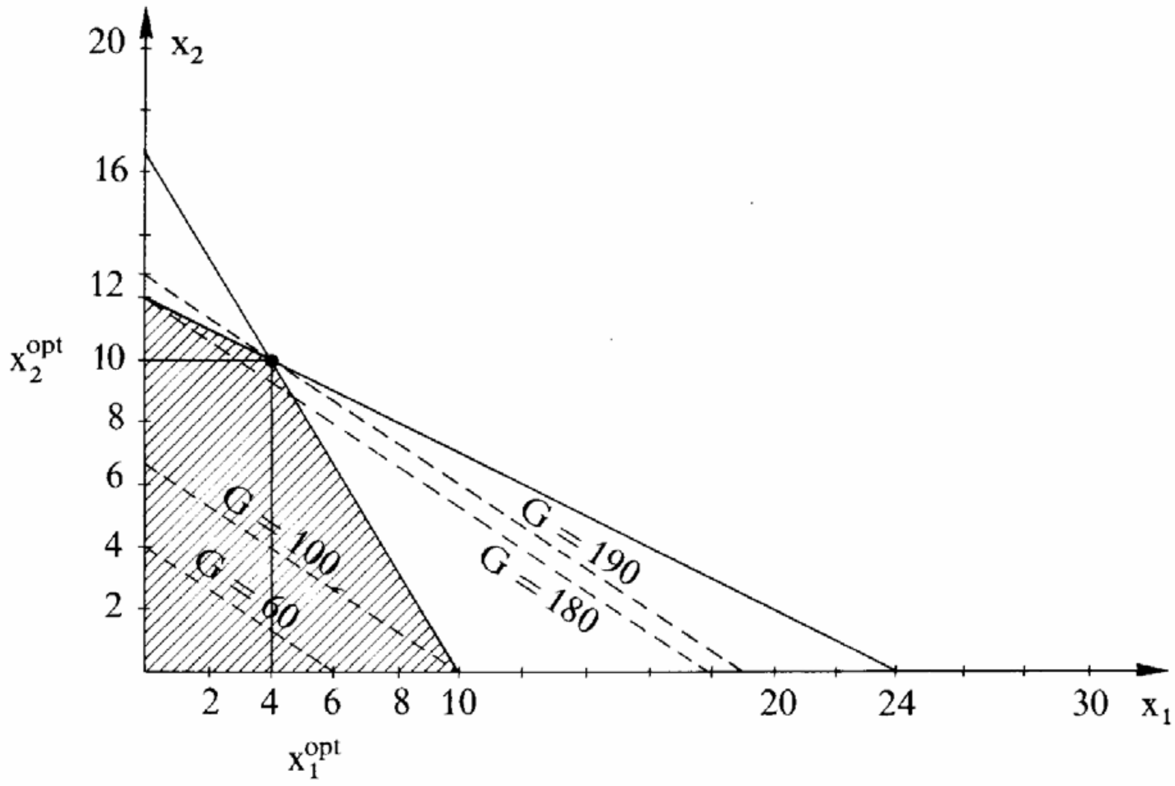
$x_2 \leq 50/3 - 5/3 * x_1$

sowie

$x_2 \leq 12 - 1/2 * x_1$.

Im vorliegenden Beispiel handelt es sich ersichtlicherweise bei diesen Nebenbedingungen um Ungleichungen. In ihrer Kombination erzeugen sie – unter zusätzlicher Berücksichtigung der Nichtnegativitätsrestriktionen – den zulässigen, im folgenden Schaubild schraffierten Lösungsraum.

Schaubild: Beispiel zur linearen Optimierung



Quelle: Schierenbeck 2000, S. 181

Es sind also zwischen x_1 und x_2 nur Mengenkombinationen im schraffierten Bereich zulässig. Wegen der Nicht-Negativitätsrestriktionen beschränkt sich die Darstellung zum einen auf den positiven Quadranten des karthesischen Koordinatensystems, und zum anderen wird der Lösungsraum durch die Fläche unterhalb des Schnittpunkts aus beiden Nebenbedingungen determiniert.

In einem nächsten Schritt wird nach der *optimalen* Lösung des Entscheidungsproblems gesucht. Hierzu muss man die Zielfunktion in das Koordinatensystem einzeichnen. Dies geschieht, indem für G unterschiedliche Werte eingesetzt werden. Beispielsweise gilt für G = 60: $x_2 = 60/15 - 10/15 * x_1 = 4 - 2/3 * x_1$. Diese so genannten *Iso-Gewinnlinien* werden nun vom Ursprung weg parallel verschoben. So lange sie innerhalb des zulässigen Lösungsraumes verortet sind, sind die zugehörigen Gewinnwerte realisierbar. Letzteres gilt im Umkehrschluss nicht mehr für Iso-Gewinnlinien, die außerhalb des Lösungsraumes angesiedelt sind. Erkennbarerweise ist jene Lösung *optimal*, in der die Iso-Gewinnlinie gerade noch im Lösungsraum liegt (Tangential-Lösung). Im vorliegenden Beispielsfall ist dies bei $x_1 = 4$ (Sonnenschirmen) und $x_2 = 10$ (Regenschirmen) sowie bei einem zugehörigen Gewinn von G = 190 (Geldeinheiten) der Fall.

Wären die Iso-Gewinnlinien im Übrigen parallel zu einer der Nebenbedingungen gewesen – was hier erkennbarerweise nicht der Fall war –, wäre eine Strecke zwischen zwei Eckpunkten des Lösungsraums optimal gewesen.

In den Fällen des hier skizzierten zweidimensionalen Typus mit zwei Erklärungsvariablen x_1 und x_2 und zwei Nebenbedingungen ist es im Grunde genommen ausreichend, wenn man die beiden Nebenbedingungen gleichsetzt. Die auf diese Weise erhaltenen Mengen für x_1 und x_2 werden in die Zielfunktion eingesetzt, was hier den maximalen Wert der Zielgröße „Gewinn“ angibt.

$\text{NB I} \overset{!}{=} \text{NB II}$

$50/3 – 5/3 * x_1 = 12 – 1/2 * x_1$

$100/6 – 10/6\ x_1 = 72/6 – 3/6\ x_1$

$28/6 = 7/6 * x_1$

$7 * x_1 = 28$

$\underline{x_1^{OPT} = 4}$

$\underline{x_2^{OPT} = 12 – 1/2 * 4 = 12 – 2 = 10}$

$\underline{G^{OPT} = 10 * x1 + 15 * x2 = 10 * 4 + 15 * 10 = 190}$

3. Der Simplex-Algorithmus

Der Simplex-Algorithmus als verbreitetster Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist dadurch gekennzeichnet, dass er die Ecken des die Problemstellung reflektierenden Polyeders – im obigen Schaubild die Ecken des schraffierten Vierecks – solange absucht, bis es zu einer Optimallösung kommt. Dies kann theoretisch exponentiell lange dauern; in der Praxis sind die zugehörigen Laufzeiten aber bedeutend geringer. Ein wesentlicher Vorteil des Simplex-Algorithmus gegenüber anderen Verfahren besteht darin, dass er nach dem Hinzufügen einer weiteren Variablen oder Ungleichung bzw. nach einer leichten Koeffizientenänderung nicht von vorne beginnen muss, sondern sozusagen von einer bereits erreichten Ecke des Polyeders aus „warm“ starten kann.

In der im obigen Schaubild dargelegten Grafik würde sich der Simplex-Algorithmus von den Eckpunkten (0; 0) und (0; 12) bis hin zum optimalen Eckpunkt (4; 10) „tasten“.

Mittels des Simplex-Algorithmus soll das eingangs genannte Gleichungssystem nunmehr – gemäß unserer Zielsetzung „Gewinnmaximierung“ – optimal entschlüsselt werden. Wir führen an dieser Stelle x_3 und x_4 als so genannte Schlupfvariablen ein, da wir es bei den betreffenden Nebenbedingungen mit Ungleichungen zu tun haben, welche wir auf diese Weise zu Gleichungen umfunktionalisieren:

$$5\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \qquad = 50,$$

$$3\,x_1 + 6\,x_2 \qquad + x_4 = 72.$$

X_3 und x_4 sind sozusagen Indikatoren für die Größe des jeweiligen Ungleichseins.

Bei der Lösung des Systems können sie nicht als Referenzgrößen verwendet werden, da schließlich x_1 – d. h. die Anzahl an Sonnenschirmen – und x_2 – d. h. die Anzahl an Regenschirmen – die Entscheidungsvariablen darstellen. Sinnvollerweise sind Gleichungssysteme so umzuschlüsseln, dass „Lösungs-Schlüssel“ nicht bei den Schlupfvariablen gesetzt werden. Man nennt x_1 und x_2 daher auch die Schlüsselvariablen, während x_3 und x_4 Nicht-Schlüsselvariablen bzw. so genannte freie Variablen heißen, da ihre Werte frei wählbar sind.

Üblicherweise stellt man das Gleichungssystem in Matrixschreibweise dar. In den Zeilen werden die Gleichungen und in den Spalten die Variablen des Systems angegeben. Der Wert in der 2. Zeile und 1. Spalte beispielsweise gibt den zu x_1 in der ersten Nebenbedingung gehörigen Parameterwert an. In unserem Beispiel beträgt er bekanntlich 5. Die Zielfunktion wird über die Nebenbedingungen geschrieben. Hierbei steht der Zielwert G (allgemein: x_0) in unserem Beispiel für den Gewinn. Man stellt die Zielfunktion so um, dass sie genau Null ergibt. Auf diese Weise erhält man eine Kompatibilität zur Darstellung der Nebenbedingungen. In unserem Beispiel lautet die entsprechend umgestellte Gewinnfunktion: $G – 10 x_1 – 15 x_2 = 0$.

Da es sich um ein Maximierungsproblem mit „Kleiner-gleich“-Nebenbedingungen handelt, muss keine Gleichung mit (-1) multipliziert werden.

In Matrixschreibweise erhalten wir für unser Gleichungssystem:

G	x_1	x_2	x_3	x_4	Wert
1	-10	-15	0	0	0
$I_{(1)}$:	5	3	1	0	50
$II_{(1)}$:	3	6	0	1	72

Es handelt sich offenkundig – bezogen auf die Nebenbedingungen – um ein System mit zwei (unabhängigen) Gleichungen und vier Variablen. Wegen dieser Diskrepanz zwischen Gleichungs- und Variablenanzahl ist das System nicht unmittelbar gelöst, und gemäß der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems (= 2 Freiheitsgrade) sind zwei Variablen gleich Null zu setzen. Im Ausgangstableau sind dies zunächst die beiden Entscheidungsvariablen x_1 und x_2. X_3 ist dann gleich 50 und x_4 gleich 72.

Unser Gleichungssystem soll aber im Folgenden für x_1 und x_2 gelöst werden. Man spricht auch von der Entschlüsselung des Systems. Diese ist dann gegeben, wenn in der X_1- und der X_2-Spalte jeweils eine „1“ und ansonsten lauter Nullen stehen. Die Werte für x_1 und x_2 lassen sich dann – wie auch die Gewinnhöhe – unmittelbar aus der Werte-Spalte „ganz rechts“ ablesen. Wenn in der Gewinnzeile ausschließlich nicht-negative Gewinnbeiträge auftreten, ist das System *maximal* entschlüsselt.

Im nächsten Schritt wird im Grunde genommen willkürlich ein Zellenwert der X_1- oder der X_2-Spalte als Ausgangspunkt ausgewählt. Das gewählte Ausgangselement heißt mit einem Fachbegriff Pivotelement.

Man orientiert sich üblicherweise im Sinne einer „Faustregel“ an der Spalte mit dem minimalen (negativen) Parameterwert in der umgestellten Zielfunktion. Inhaltlich bedeutet dies eine Orientierung an der Variablen mit dem höchsten Gewinnbeitrag.

Da in unserem Beispiel in der umgestellten Gewinnzeile der X_2-Parameter gleich -15 und damit kleiner als der X_1-Parameter (= -10) ist, wird hier entsprechend die X_2-Spalte ausgewählt. In der Pivotspalte muss mindestens ein Element größer Null sein. Andernfalls existierte keine optimale Lösung, und der zulässige Lösungsbereich wäre unbeschränkt.

Auf der eben genannten Grundlage wird die Pivotzeile festgelegt. Hierzu ist eine der beiden Schlupfvariablen auf den Wert Null zu setzen. Die beiden Schlupfvariablen x_3 und x_4 geben bekanntlich die jeweilige Höhe der freien Kapazitäten an. Daher folgt die gleich Null zu setzende Variable aus derjenigen Nebenbedingung, bei der eine Vergrößerung von x_2 zuerst eine kapazitative Vollauslastung bewirkt. Man vergleicht dazu die Quotienten aus Kapazitätsgrenze und X_2-Parameterwert, d. h. in unserem Beispiel 50/3 $\approx$ 16,67 und 72/6 = 12. Demnach kann zuerst – auf Basis von Nebenbedingung II – der Produktionsfaktor „Maschinen“ ausgelastet werden (und x_4 nimmt den Wert Null an).

Als Pivotelement wird entsprechend der Wert 6 von Gleichung II in der X_2-Spalte verwendet:

G	X_1	x_2	x_3	x_4	Wert
1	-10	-15	0	0	0
$I_{(1)}$:	5	3	1	0	50
$II_{(1)}$:	3	6	0	1	72

Das Pivotelement soll nun in den Wert „1“ umgewandelt werden. Daher wird Gleichung II durch 6 dividiert. Ansonsten soll in der Spalte des Pivotelements überall die Null stehen. Zur Zielfunktion ist daher das 15-fache der durch 6 dividierten Gleichung II zu addieren, und von Gleichung I ist das 3-fache der durch 6 dividierten Gleichung II zu subtrahieren:

G	x_1	X_2	x_3	x_4	Wert
1	-5/2	0	0	5/2	180
$I_{(2)}$:	7/2	0	1	-1/2	14
$II_{(2)}$:	1/2	1	0	1/6	12

Wir erhalten also in Bezug auf die Zielfunktion als spaltenbezogene Ergebnisse: -10 + 15 * ½ = -5/2, -15 + 15 * 1 = 0, 0 + 15 * 0 = 0 und 0 + 15 * 1/6 = 5/2. Bezogen auf Nebenbedingung I gilt demnach: 5 – 3 * ½ = 7/2, 3 – 3 * 1 = 0, 1 – 3 * 0 = 1 und 0 – 3 * 1/6 = -1/2. Für die „rechts außen“ stehenden Werte der Zielfunktion bzw. der Nebenbedingung I ergibt sich ergo: 0 + 15 * 12 = 180 und 50 – 3 * 12 = 14.

Wir haben uns, um im Bild des obigen Schaubilds zu bleiben, vom Ursprung ($x_1 = x_2 = G = 0$) zur „Eck-Lösung“ $x_1 = 0$, $x_2 = 12$ mit $G = 180$ bewegt.

Im nächsten Schritt ist in der X_1-Spalte ein (0/1/0-)Schlüssel zu setzen. Dies erreicht man dadurch, dass man Gleichung I durch 7/2 dividiert, und anschließend von Gleichung II die Hälfte der neuen Gleichung I subtrahiert und zu der Zielfunktion das 2,5-fache der neuen Gleichung I addiert:

G	X_1	x_2	x_3	x_4	Wert
1	0	0	5/7	15/7	**190**
$I_{(3)}$:	1	0	2/7	-1/7	**4**
$II_{(3)}$:	0	1	-1/7	5/21	**10**

Für die Zielfunktion ändern sich demnach die Parameterwerte zu: -5/2 + 5/2 * 0 = 0, 0 + 5/2 * 0 = 0, 0 + 5/2 * 2/7 = 5/7 und 5/2 + 5/2 * (-1/7) = 15/7. Für Nebenbedingung II gilt dann: ½ - ½ * 1 = 0, 1 – ½ * 0 = 1, 0 – ½ * 2/7 = -1/7 und 1/6 – ½ * (-1/7) = 5/21.

Damit hat man das betreffende Gleichungssystem entschlüsselt. Für x_1 (Anzahl der Sonnenschirme) erhält man 4 (Sonnenschirme) und für x_2 (Anzahl der Regenschirme) 10 (Regenschirme) als Ergebnis. Dieses Gleichungssystem ist zugleich maximal entschlüsselt mit einem maximalen Gewinn in Höhe von 190 Geldeinheiten. Die Zielgleichung kann ersichtlicherweise nicht mehr erhöht werden.

Dies erkennt man daran, dass alle Zielgrößen nicht-negativ sind. Andererseits sind entschlüsselte Gleichungssysteme bei Vorliegen negativer Zielgrößen nicht maximal entschlüsselt!

4. Die Cramer'sche Regel

Neben der Berechnung via Simplex-Algorithmus und grafischer Lösung hätte man im hier diskutierten Beispiel auch eine Lösung mittels Cramer'scher Regel herbeiführen können. Die Cramer'sche Regel ist eine allgemein-gültige Methode zur Bestimmung der eindeutigen Lösung eines linearen Gleichungssystems mit regulärer Koeffizientenmatrix. Eine reguläre Matrix ist eine quadratische Matrix, welche mit ihrer inversen Matrix multipliziert die Einheitsmatrix ergibt.

Wegen ihres relativ hohen Rechenaufwands ist sie für umfassendere praktische Anwendungen als der hier fraglichen jedoch nur sehr bedingt geeignet.

Für das System der Nebenbedingungen $5\ x_1 + 3\ x_2 = 50$ und $3\ x_1 + 6\ x_2 = 72$ erhält man folgende Determinanten, deren Berechnung gemäß Cramer'scher Regel notwendig ist:

|A| setzt sich spaltenweise aus den Parametern der beiden Nebenbedingungen zusammen und beträgt:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 30 - 9 = 21,$$

$|A_1|$ setzt sich spaltenweise aus den Werten der Zielfunktion und den Parameterwerten von Nebenbedingung II zusammen:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 50 & 3 \\ 72 & 6 \end{vmatrix} = 50 \cdot 6 - 72 \cdot 3 = 300 - 216 = 84 \Rightarrow x_1 = \frac{84}{21} = 4;$$

die Division von $|A_1|$ durch $|A|$ führt zum X_1-Wert.

$|A_2|$ setzt sich spaltenweise aus den Parameterwerten von Nebenbedingung I und den Werten der Zielfunktion zusammen:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 50 \\ 3 & 72 \end{vmatrix} = 5 \cdot 72 - 3 \cdot 50 = 360 - 150 = 210 \Rightarrow x_2 = \frac{210}{21} = 10;$$

die Division von $|A_2|$ durch $|A|$ führt zum X_2-Wert.

Damit ist G^{opt} = 10 * 4 + 15 * 10 = 190.

Streng genommen dient die Cramer'sche Regel aber nur der Lösung linearer Gleichungssysteme und nicht unbedingt deren optimaler Lösung. Daher soll sie hier nicht weiter vertieft werden.

5. Schlussbetrachtung

Zur Lösung linearer Optimierungsprobleme wurden mit der zeichnerischen und der Simplex-Methode vor allem zwei alternative Lösungsansätze exemplarisch vorgestellt. Dies geschah auf der Grundlage eines kleinen Beispiels. In der Praxis hat man es zwar üblicherweise mit umfassenderen Gleichungssystemen zu tun. Gleichwohl folgt auch deren Lösung den hier dargelegten Prinzipien.

Im Beispiel ergab sich im Übrigen eine Lösung des linearen Maximierungsproblems. Eine solche muss indes – wie ich nochmals betonen möchte – nicht unbedingt vorliegen.

Verwendete Literatur:

- Dörsam, Peter: Mathematik anschaulich dargestellt für Studierende der Wirtschaftswissenschaften, 11. Auflage, Heidenau 2003
- Rommelfanger, Heinrich: Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler, 2. Auflage, Frankfurt am Main 1981
- Schierenbeck, Henner: Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre, 15. Auflage, München/Wien 2000