Verteilungsmaße: Theorie und Empirie

Dr. Jürgen Faik

- Lüneburg, 13.11.2007 -

1. Einleitung

Ich werde mit Ihnen in den kommenden 90 Minuten über die Theorie und Empirie von Verteilungsmaßen diskutieren. Ich werde mich dabei auf gängige Ungleichheitsindikatoren konzentrieren.

Demgegenüber werden die Verteilungsränder des Reichtums und der Armut sowie die zugehörigen Messziffern nicht explizit betrachtet.

Auch ist darauf hinzuweisen, dass panel-spezifische Kennziffern wie Mobilitätsmaße außerhalb der Betrachtung bleiben müssen.

Um quantitative Aussagen über das Ausmaß der personellen Wohlstands-Ungleichheit zu treffen, sind eine Reihe von Verteilungsindikatoren entwickelt worden. Als Wohlstandsindikator wird im Folgenden beispielhaft auf das Einkommen Bezug genommen. Die entsprechenden Aussagen sind aber grundsätzlich auf alternative Wohlstandsindikatoren übertragbar.

2. Zum Axiomensystem der personellen Ungleichheitsmessung[1]

An die einzelnen Verteilungsindikatoren sind in der Literatur verschiedene Anforderungen gestellt worden. Man spricht von einem Axiomensystem.

Gemäß dem *Anonymitätspostulat* ist ausschließlich die Einkommensvariable – und keine andere Variable wie z. B. eine soziodemografische

[1] Vgl. auch Faik 1995, S. 294-297, und die dort gegebenen Literaturhinweise.

Größe – für die Reihung verschiedener Einkommensverteilungen maßgeblich. In dieser Sicht ist es z. B. unerheblich, ob eine Frau die reichste und ein Mann die ärmste Untersuchungseinheit mit beispielsweise 1.000 Geldeinheiten versus 100 Geldeinheiten sind oder ob dies genau umgekehrt ist.

Das *Transferprinzip* besagt, dass ein Einkommenstransfer von einem Reicheren zu einem Ärmeren die gemessene Ungleichheit verringern soll. Dabei wird zusätzlich unterstellt, dass sich der Transfergeber nach dem Transfervollzug immer noch besser als der Transferempfänger zuvor stellt. Mit dem Transferprinzip ist es beispielsweise vereinbar, wenn Untersuchungseinheit A von ihren 1.000 Geldeinheiten 100 Geldeinheiten an Untersuchungseinheit B abgibt, welche zuvor 100 Geldeinheiten hatte und nunmehr also über 200 Geldeinheiten verfügen kann, und wenn dies mit einem Rückgang der gemessenen Ungleichheit einhergeht.

Von *Transfersensitivität* spricht man zusätzlich, wenn die Ungleichheitsreduktion bei einem niedrigeren Einkommensniveau des Empfängers stärker als bei einem höheren Einkommensniveau des Rezipienten ausfällt. Wäre der oben genannte beispielhafte Transfer von Untersuchungseinheit A in Höhe von 100 Geldeinheiten an Untersuchungseinheit C mit einem vormaligen Einkommensniveau von 50 Geldeinheiten gegangen, hätte die ausgewiesene Ungleichheit kleiner als im oben beschriebenen Beispielsfall sein müssen.

Das *Symmetrieprinzip* fordert, dass bei einer ungleichen Populationsbasis zweier Verteilungen die erste Verteilung mit der Populationsbasis der zweiten Verteilung und die zweite Verteilung mit der Populationsgröße der ersten Verteilung „gepoolt“ werden. Die Einkommensverteilung {100 Geldeinheiten; 1.000 Geldeinheiten} soll also gleichwertig zur Einkommensverteilung {100 Geldeinheiten; 100 Geldeinheiten; 1.000 Geldeinheiten; 1.000 Geldeinheiten} sein.

Die *Invarianz gegenüber einer additiven Konstanten* bezieht sich auf die absoluten Verteilungsabstände. Ein Verteilungsmaß soll diesem Prinzip zufolge Verteilungen dann als identisch anzeigen, wenn zu jedem Einkommenswert der originären Verteilung ein konstanter Betrag addiert wird. In ähnlicher Weise spricht man von *multiplikativer Invarianz* eines Ungleichheitsmaßes, wenn jeder Einkommenswert der originären Verteilung mit einem konstanten Betrag multipliziert wird und der Ungleichheitsindikator davon unbeeinflusst bleibt.

Ändert sich die gemessene Ungleichheit beim Vergleich der Verteilungen {100 Geldeinheiten; 1.000 Geldeinheiten} und {100 Geldeinheiten + 50 Geldeinheiten = 150 Geldeinheiten; 1.000 Geldeinheiten + 50 Geldeinheiten = 1.050 Geldeinheiten} nicht, liegt additive Invarianz vor. Demgegenüber wäre multiplikative Invarianz etwa dann gegeben, wenn der Ungleichheitsindikator seinen Wert beim Vergleich der Verteilungen {100 Geldeinheiten; 1.000 Geldeinheiten} und {100 Geldeinheiten · 2 = 200 Geldeinheiten; 1.000 Geldeinheiten · 2 = 2.000 Geldeinheiten} nicht ändern würde.

Additiv-invariante Maße werden mitunter auch als „linke Maße“ bezeichnet, da sie vornehmlich die Werturteile der politischen „Linken“ zum Ausdruck bringen. Entsprechend heißen multiplikativ-invariante Verteilungsmaße manchmal auch „rechte Maße“.

Nach einer empirischen Untersuchung von Amiel/Cowell stimmt die multiplikative Invarianz in höherem Maße mit den faktischen Ungleichheitsvorstellungen überein als die additive Invarianz. Während in der Untersuchung von Amiel/Cowell das Symmetriepostulat im Wesentlichen Bestätigung fand, galt dies in Bezug auf das Transferprinzip in deutlich geringerem Maße.

3. Die Lorenzkurve[2]

Bezüglich der meisten Ungleichheitsindizes bildet die Gleichverteilung der personellen Einkommen den analytischen Fixpunkt.

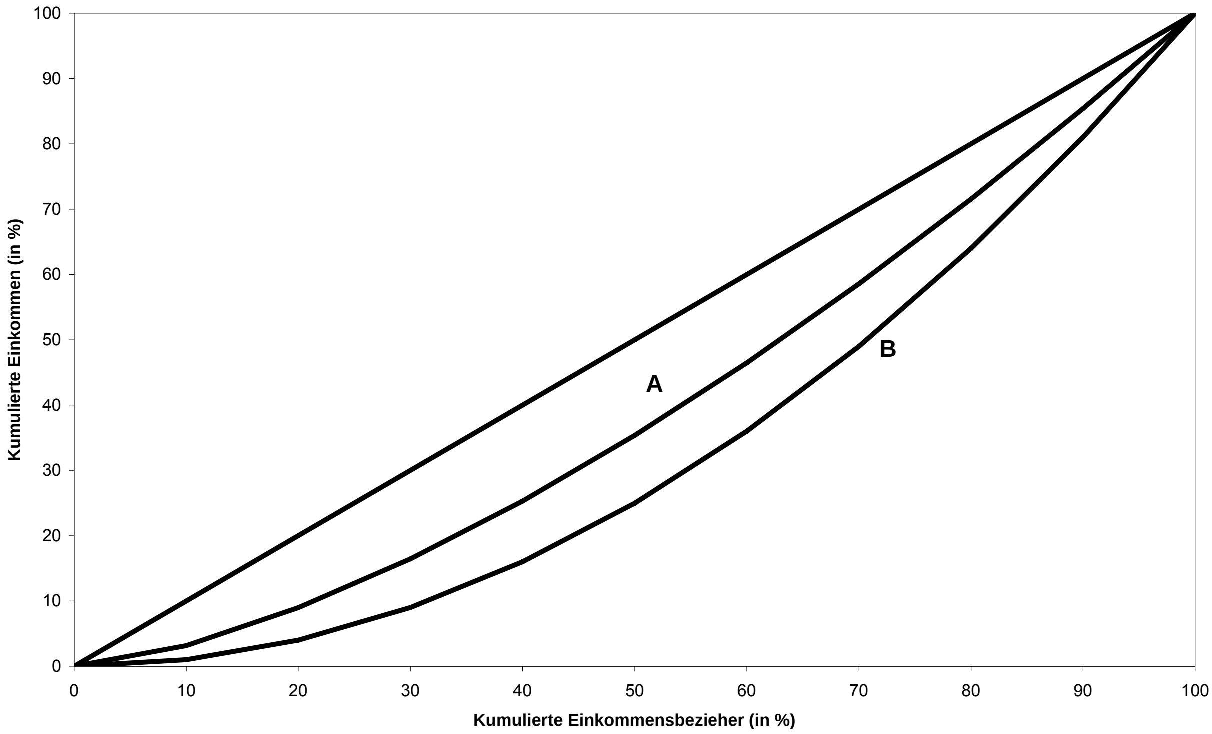
Dies gilt auch für das Konzept der Lorenzkurve. Eine Lorenzkurve setzt die (aufsteigend) kumulierten prozentualen Häufigkeiten der Einkommensbezieher (auf der Abszisse) zu den (ebenfalls aufsteigend) kumulierten prozentualen Einkommenswerten (auf der Ordinate) in Beziehung.

Bei vollständiger Gleichverteilung der Einkommen würden die untersten 10 % der Einkommensbezieher 10 % der Einkommenssumme, die untersten 20 % der Einkommensbezieher 20 % der Einkommenssumme erhalten usw. Die Gleichverteilungslinie im Lorenzkurven-Zusammenhang ist demnach ein 45°-Fahrstrahl.

Je näher eine Lorenzkurve an der Gleichverteilungslinie liegt, desto geringer ist die von ihr ausgewiesene Ungleichheit et vice versa. Von zwei Lorenzkurven repräsentiert also diejenige eine geringere Ungleichheit, welche sich durchgängig näher an der Gleichverteilungslinie befindet.

[2] Vgl. Faik 2007, S. 103-104, und die dortigen Literaturhinweise.

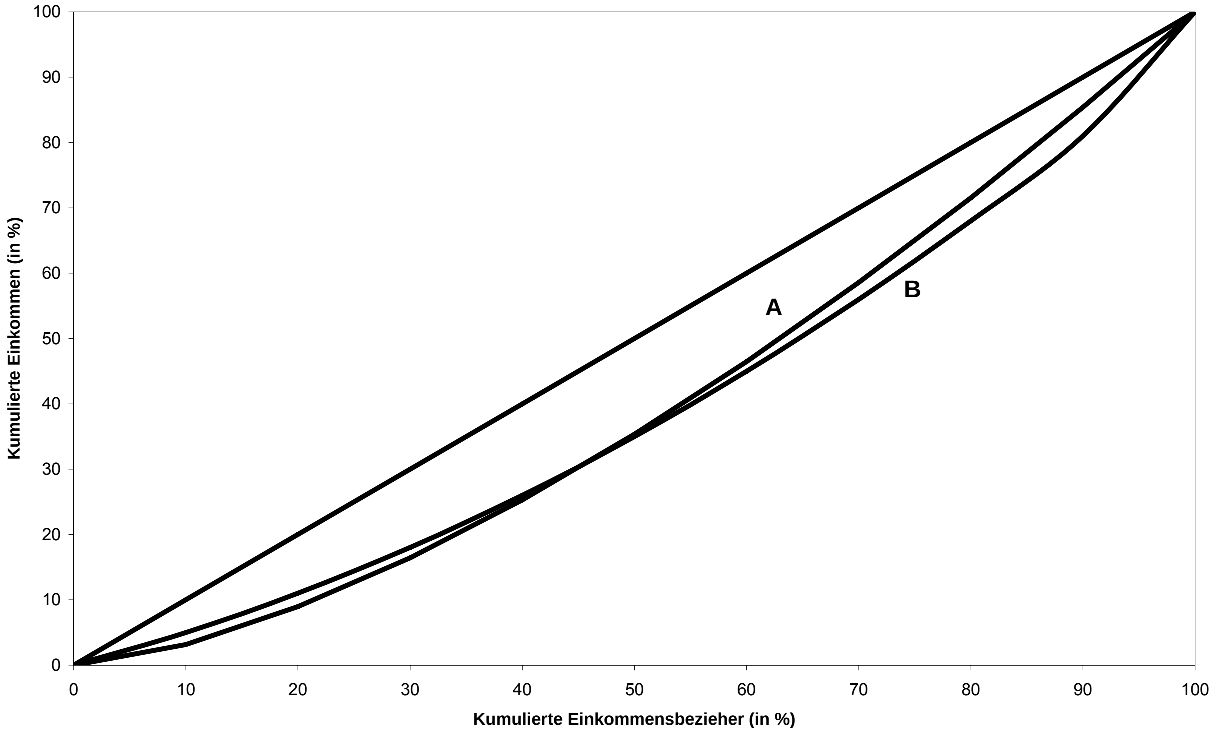
Abbildung 1:



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Faik 2006, S. 471

Schwieriger ist die Festlegung einer Ungleichheitsrangfolge, wenn sich Lorenzkurven schneiden. In diesem Fall könnte man die Verteilung mit der geringeren Fläche zwischen Gleichverteilungslinie und Lorenzkurve gegenüber der anderen Verteilung als gleichmäßiger einstufen. Dies wäre im Beispielsfall in Abbildung 2 Verteilung A im Vergleich zur Verteilung B. Eine solche Aussage setzt aber voraus, dass alle Einkommensabschnitte normativ als gleichwertig eingestuft werden.

Abbildung 2:



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Faik 2006, S. 471

Die gängigen Ungleichheitsmaße sind hingegen durch „Vorlieben" für bestimmte Einkommensbereiche geprägt. Auf einige gängige Ungleichheitsmaße werde ich im Folgenden, wie eingangs gesagt, etwas näher eingehen.

4. Ausgewählte Ungleichheitskennziffern

4.1 Der Gini-Koeffizient[3]

Der Gini-Koeffizient ist vermutlich das gebräuchlichste Ungleichheitsmaß. Er reflektiert im Lorenzkurven-Zusammenhang das Verhältnis aus der Fläche zwischen der Gleichverteilungsdiagonalen und der Lorenzkurve einerseits sowie der Gesamtfläche unterhalb der Gleichvertei-

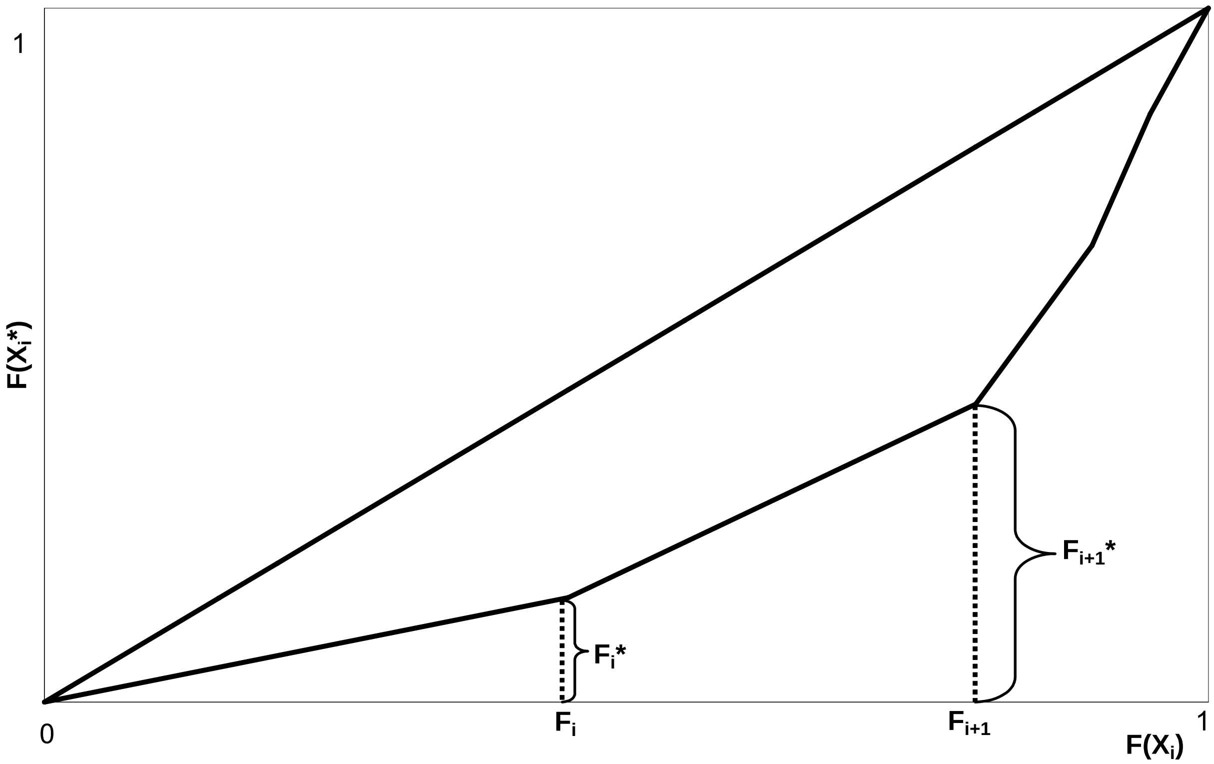
[3] Vgl. Faik 2007, S. 105-107.

lungsdiagonalen andererseits. Da die Dreiecksfläche unterhalb der Gleichverteilungslinie einen Flächeninhalt von 0,5 aufweist, kann der Gini-Koeffizient auch als das Zweifache der Fläche zwischen der Gleichverteilungsdiagonalen und der Lorenzkurve interpretiert werden.

Die Fläche unter der Lorenzkurve lässt sich durch Addition verschiedener Teilflächen ermitteln. Hierbei ist jede Teilfläche (näherungsweise) das mathematische Produkt aus ($F_{i+1} - F_i$) und ($F_i^* + F_{i+1}^*$) / 2.[4] Die zugehörige Gesamtfläche verdoppelt und vom Wert Eins subtrahiert, ergibt schließlich den Gini-Koeffizienten:

(1) $GINI = 1 - \sum_{i=1}^{K} \left(F_i^* + F_{i+1}^*\right) \cdot f_{i+1}$.

Abbildung 3:



[4] Die betreffende (Teil-)Fläche kann als Summe zweier Flächenteile berechnet werden. Mit ($F_{i+1} - F_i$) = f_{i+1} gilt: $F_i^* \cdot f_{i+1} + \frac{F_{i+1}^* - F_i^*}{2} \cdot f_{i+1}$. Dies führt zu: $f_{i+1} \cdot \left(F_i^* + \frac{F_{i+1}^*}{2} - \frac{F_i^*}{2}\right)$ bzw. $f_{i+1} \cdot \left(\frac{F_i^* + F_{i+1}^*}{2}\right)$.

Quelle: Faik 2007, S. 106

Gleichung (1) ist insofern eine Näherungslösung, als der Gini-Koeffizient sich eigentlich als paarweiser Vergleich *aller* Einkommenswerte ergibt:

(2) $$GINI = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2 \cdot \mu} \cdot \sum_{i=1}^{n} i \cdot Y_i \cdot$$

Der Gini-Koeffizient bewegt sich in den Grenzen 0 (vollständige Gleichverteilung; alle Untersuchungseinheiten haben das gleiche Einkommen) und [(n-1)/n], wobei n den Grundgesamtheitsumfang repräsentiert. Mit wachsender Bevölkerungsgröße nähert sich die Obergrenze des Gini-Koeffizienten dem Wert Eins. Inhaltlich bedeutet dies, dass eine Untersuchungseinheit das gesamte Einkommen besitzt, während alle anderen Untersuchungseinheiten über kein Einkommen verfügen.

Der Gini-Koeffizient ist invariant gegenüber multiplikativen Veränderungen. Dies lässt ihn als (politisch-)„rechtes" Maß erscheinen.

Übersicht 1:

Index	Formel	Minimum	Maximum	Transferprinzip	Invarianz	Bemerkungen
GINI	$GINI = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2 \cdot \mu} \cdot \sum_{i=1}^{n} i \cdot Y_i$	0	[(n-1)/n]	Ja!	Multiplikativ	Besonders sensitiv im mittleren Einkommensbereich

Quelle: Eigene Zusammenstellung

4.2 Einfache Streuungsmaße

Zur Messung von Einkommensungleichheit eignen sich grundsätzlich auch einfache Streuungsmaße, die angeben, wie weit die Einkommenswerte auseinanderliegen (*Spannweitenmaße*) bzw. wie weit sie von einem mittleren Wert abweichen (*Mittelwertabweichungen*).

4.2.1 Spannweitenmaße

Eine sehr einfache Möglichkeit, Angaben über die Einkommensungleichheit zu machen, bieten Spannweitenmaße. Sie beziehen sich allein auf den Vergleich oberer versus unterer Einkommensgrenzen. Damit haben sie aber allesamt den Nachteil, die dazwischen liegenden Einkommenswerte zu vernachlässigen.

Die absolute Spannweite (ASW) z. B. ist als Differenz aus maximalem und minimalem Einkommenswert definiert:

(3) $$ASW = Y_{\max} - Y_{\min}$$

[mit: ASW = absolute Spannweite; Y_{max} = Einkommensmaximum; Y_{min} = Einkommensminimum].

Eine Vervielfachung von Y_{max} und Y_{min} im gleichen Ausmaß erhöht ASW offenkundig, so dass dieser Ungleichheitsindikator nicht multiplikativ-invariant ist. Demgegenüber ruft die Addition eines konstanten Betrages sowohl zum Maximal- als auch zum Minimalwert keine Veränderung der absoluten Spannweite hervor. ASW ist damit additiv-invariant.

Die Untergrenze der absoluten Spannweite in Höhe von Null wird bei völliger Gleichverteilung der Einkommen erreicht, d. h. wenn Y_{max} = Y_{min} gilt. Bei völliger Ungleichverteilung der Einkommen vereinigt der reichste Einkommensbezieher die gesamte Einkommenssumme auf sich, während alle anderen Einkommensbezieher ein Einkommen in Höhe von Null beziehen. Da die Einkommenssumme dem Produkt aus Populationsgröße und arithmetischem Mittelwert entspricht, bildet dieses Produkt die Werteobergrenze von ASW.

Auf Transfers reagiert die absolute Spannweite naheliegenderweise nur dann, wenn die Einkommensober- und/oder die Einkommensuntergrenze von ihnen betroffen sind.

Dividiert man ASW durch seine Werteobergrenze, erhält man die relative Spannweite (RSW):

(4) $$RSW = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{n \cdot \mu}$$

[mit: RSW = relative Spannweite; Y_{max} = Einkommensmaximum; Y_{min} = Einkommensminimum; n = Populationsgröße; μ = arithmetischer Einkommensmittelwert].

Deren Wertebereich liegt zwischen Null (Gleichverteilung) und Eins (völlige Ungleichverteilung).

Im Unterschied zur absoluten Spannweite ist RSW multiplikativ-invariant, da sich Einkommensvervielfachungen im Zähler und Nenner dieses Indikators gegeneinander kürzen.

Während sich die beiden beschriebenen Spannweitenmaße unmittelbar auf Einkommens*niveaus* beziehen, sind Quantilsmaße insofern *relativ*, als sie das gesamte Einkommensspektrum in gleich große Prozentbereiche zerlegen. Wird der Einkommensbereich beispielsweise in vier gleich große Prozentabschnitte aufgeteilt, erhält man vier Quartile: Die untersten 25 % der Einkommenshierarchie (erstes Quartil; Q_1), den Bereich von 25 % bis zu 50 % des Gesamteinkommens, d. h. bis zum Median (zweites Quartil; Q_2), den Abschnitt vom Median bis zu 75 % des Gesamteinkommens (drittes Quartil; Q_3) und die obersten 25 % der Einkommenshierarchie (viertes Quartil; Q_4).

Der Quartilsabstand (QA) ist als Differenz aus dem Einkommenswert an der Untergrenze des vierten Quartils bzw. äquivalent: an der Obergrenze des dritten Quartils und dem Einkommenswert an der Obergrenze des ersten Quartils definiert:

(5) $$QA = Q_3^{(o)} - Q_1^{(o)}$$

[mit: QA = Quartilsabstand; $Q_3^{(o)}$ = Einkommensobergrenze des dritten Quartils; $Q_1^{(o)}$ = Einkommensobergrenze des ersten Quartils].

Die Konzeption des Quartilsabstandes ähnelt der absoluten Spannweite. Es gelten daher analoge Einschränkungen. Insbesondere ist zu bemängeln, dass nur ausgewählte Einkommenswerte in die Betrachtung einbezogen werden. Wie die absolute Spannweite, ist auch der Quartilsabstand additiv-invariant; seine Untergrenze liegt bei Null und seine Obergrenze beim Produkt aus Populationsbasis und Einkommensmittelwert.

Ein weiteres Quantilsmaß ist die Quantilsrelation (QR). Bei ihr wird der Einkommenswert eines oberen Quantils durch den Einkommenswert eines unteren Quantils dividiert, z. B.:

(6) $$QR = \frac{Q_3^{(o)}}{Q_1^{(o)}}$$

[mit: QR = Quartilsrelation; $Q_3^{(o)}$ = Einkommensobergrenze des dritten Quartils; $Q_1^{(o)}$ = Einkommensobergrenze des ersten Quartils].

Verbreitet ist auch die 90:10-Relation im Sinne des Verhältnisses der Einkommensuntergrenze der „oberen 10 %“ zur Einkommensobergrenze der „unteren 10 %“ der Einkommensverteilung.

Dadurch, dass es sich bei der Quantils- bzw. Quartilsrelation um eine Verhältnismaßzahl handelt, ist sie multiplikativ-invariant. Bei völliger Gleichverteilung stimmen Zähler- und Nennerwert überein, so dass QR als Untergrenze den Wert 1 aufweist. In dem Falle, dass vollständige Ungleichverteilung herrscht, d. h. die gesamte Einkommenssumme in Händen einer einzigen Untersuchungseinheit ist, konvergiert QR gegen unendlich.

Wie ASW und RSW, erfüllen auch QA und QR das Transferprinzip nur dann, wenn die in QA bzw. QR einbezogenen Einkommenswerte tangiert sind.

Übersicht 2:

Index	Formel	Minimum	Maximum	Transferprinzip	Invarianz	Bemerkungen
ASW	$ASW = Y_{\max} - Y_{\min}$	0	n µ	Nur teilweise!	Additiv	Vernachlässigung von „Zwischenwerten“
RSW	$RSW = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{n \cdot \mu}$	0	1	Nur teilweise!	Multiplikativ	Vernachlässigung von „Zwischenwerten“
QA	$QA = Q_3^{(o)} - Q_1^{(o)}$	0	n µ	Nur teilweise!	Additiv	Vernachlässigung von „Zwischenwerten“
QR	$QR = \frac{Q_3^{(o)}}{Q_1^{(o)}}$	1	∞	Nur teilweise!	Multiplikativ	Vernachlässigung von „Zwischenwerten“

Quelle: Eigene Zusammenstellung

4.2.2 Mittelwertabweichungen

Eine andere Klasse von Streuungsmaßen bezieht sich auf Abweichungen vom Mittelwert der Verteilung, wobei üblicherweise das arithmetische Mittel als Bezugspunkt gewählt wird. Auf diese Weise werden – im Unterschied zu den Spannweitenmaßen – sämtliche Einkommenswerte in die Ungleichheitsberechnungen einbezogen.

Da es für das arithmetische Mittel charakteristisch ist, dass die Summe der (einfachen) Mittelwertabweichungen gleich Null ist, müssen die entsprechenden Abweichungen einer mathematischen Transformation unterzogen werden.

Eine Möglichkeit in diesem Zusammenhang bietet die Bezugnahme auf die Beträge der Abweichungen; das zugehörige Verteilungsmaß heißt durchschnittliche absolute Abweichung:

(7) $$DAA = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| Y_i - \mu \right|$$

[mit: DAA = durchschnittliche absolute Abweichung; Y_i = Einkommenswert i (i = 1, 2, …, n); n = Populationsgröße; μ = arithmetischer Einkommensmittelwert].

Die Wertebegrenzungen von DAA sind Null und 2 · μ · (1 – 1/n). Die durchschnittliche absolute Abweichung ist additiv-invariant und erfüllt das Transferprinzip nur dann, wenn Transfergeber und –empfänger nicht beide oberhalb oder nicht beide unterhalb des arithmetischen Mittelwertes einsortiert sind.

Dividiert man DAA durch 2μ, erhält man mit der standardisierten durchschnittlichen absoluten Abweichung (SDAA) ein multiplikativ-invariantes Maß:

(8) $$SDAA = \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| Y_i - \mu \right|$$

[mit: SDAA = standardisierte durchschnittliche absolute Abweichung; Y_i = Einkommenswert i (i = 1, 2, …, n); n = Populationsgröße; μ = arithmetischer Einkommensmittelwert].

Eine andere Möglichkeit der Transformation der Mittelwertabweichungen ist das Quadrieren der Abweichungen. Das resultierende Maß – die Varianz – hat die unschöne Eigenschaft, keine realiter gegebene Währungseinheit als Dimension aufzuweisen. Daher zieht man in der Regel aus der Varianz die Quadratwurzel und erhält als Verteilungsmaß die Standardabweichung (S):

(9) $$S = \sqrt[2]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \mu \right)^2}$$

[mit: S = Standardabweichung; Y_i = Einkommenswert i (i = 1, 2, …, n); n = Populationsgröße; μ = arithmetischer Einkommensmittelwert].

Die Standardabweichung ist additiv-invariant und bewegt sich in den Grenzen von Null bis $\sqrt[2]{\mu^2 \cdot (n-1)}$. Es kann gezeigt werden, dass die Standardabweichung dem Transferprinzip nur in bestimmten Fällen folgt, dieses Prinzip also nur schwach erfüllt.

Für Vergleiche zwischen Einkommensverteilungen mit unterschiedlichem Mittelwert oder mit unterschiedlichen Währungseinheiten ist eine dimensionslose Streuungsgröße vorteilhaft.

Eine solche Größe stellt der Variationskoeffizient (V) dar[5]; er ist definiert als

(10) $V = \frac{S}{\mu}$.

Er genügt zwar dem Transferprinzip. Allerdings wird bei ihm eine Einkommensübertragung von einer reicheren zu einer ärmeren Untersuchungseinheit *unabhängig* von dem (ursprünglichen) Einkommensniveau des Rezipienten in gleicher Weise berücksichtigt, so dass V *nicht* transfersensitiv ist. Als Folge davon reagiert V bei linkssteilen Einkommensverteilungen auf (marginale) Veränderungen im oberen Einkommensbereich besonders stark.

Eine gute Annäherung an derartige linkssteile Verteilungen stellt die Lognormalverteilung dar. Einer ihrer Parameter ist die Standardabweichung der logarithmierten Einkommen (L_1). Diese eignet sich daher intuitiv gut zur Messung der Einkommensungleichheit. Sie ist folgendermaßen definiert:

(11) $L_1 = \sqrt[2]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\ln Y_i - \ln \phi)^2}$

[5] Vgl. z. B. Faik 2007, S. 95-96.

$$= \sqrt[2]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{Y_i}{\phi}\right)^2}$$

[mit: L_1 = Standardabweichung der logarithmierten Einkommen; ϕ = *geometrischer* Einkommensmittelwert: $\ln \phi = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln Y_i$].

Mitunter wird L_1 durch die Formel für die logarithmische Standardabweichung (L_2) approximiert:

$$(12) \quad L_2 = \sqrt[2]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\ln Y_i - \ln \mu)^2}$$

$$= \sqrt[2]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{Y_i}{\mu}\right)^2}$$

[mit μ als *arithmetischem* Einkommensmittelwert].

Aufgrund der Logarithmierung sämtlicher (notwendigerweise nicht-negativer) Einkommen reagieren sowohl L_1 als auch L_2 auf Verteilungsänderungen im unteren Einkommensbereich besonders stark.

Es kann gezeigt werden[6], dass dem Transferprinzip bei L_1 bzw. L_2 nur solange Genüge getan wird, wie das ärmere Individuum ein Einkommen von weniger als $e \cdot \phi$ (bei L_1) bzw. $e \cdot \mu$ (bei L_2) bezieht (wobei e = 2,71828...).

[6] Vgl. Faik 1995, S. 302-303.

Übersicht 3:

Index	Formel	Minimum	Maximum	Transferprinzip	Invarianz	Bemerkungen
DAA	$DAA = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lvert Y_i - \mu \rvert$	0	2 µ [1 – (1/n)]	Eventuell!	Additiv	Dimension „Währungseinheit“
SDAA	$SDAA = \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lvert Y_i - \mu \rvert$	0	[1 – (1/n)]	Eventuell!	Multiplikativ	Dimension „Währungseinheit“
S	$S = \sqrt[2]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)^2}$	0	$\sqrt[2]{\mu^2 \cdot (n-1)}$	Schwach!	Additiv	Dimension „Währungseinheit“
V	$V = \frac{S}{\mu}$	0	$\sqrt[2]{n-1}$	Ja!	Multiplikativ	Dimensionslos; nicht transfersensitiv
L_1	$L_1 = \sqrt[2]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\ln Y_i - \ln \phi)^2}$	0	∞	Eventuell!	Multiplikativ	Besonders sensitiv im unteren Einkommensbereich
L_2	$L_2 = \sqrt[2]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\ln Y_i - \ln \mu)^2}$	0	∞	Eventuell!	Multiplikativ	Besonders sensitiv im unteren Einkommensbereich

Quelle: Eigene Zusammenstellung

4.3 Das Theil'sche Entropiemaß

Im Zusammenhang mit dem Theil'schen Entropiemaß werden Analogien zur Informationstheorie methodisch genutzt. Ausgangspunkt ist die Überlegung, dass ein Ereignis umso interessanter ist, desto geringer seine Eintrittswahrscheinlichkeit ist. Eine Möglichkeit, den Informationsgehalt eines Ereignisses h zu operationalisieren, ist die Bildung des logarithmierten Kehrwertes der Eintrittswahrscheinlichkeit ψ:

(13) $$h(\psi) = \ln \frac{1}{\psi}.$$

Geht man davon aus, dass sich ein Gesamtereignis aus n Einzelereignissen zusammensetzt, lässt sich der *erwartete* Informationsgehalt des Gesamtereignisses H als die Summe der mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichteten Informationsgehalte darstellen:

(14) $$H(\psi) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot h(\psi_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot \ln \frac{1}{\psi_i}; \quad mit: \quad \sum_{i=1}^{n} \psi_i = 1.$$

Es kann gezeigt werden, dass H bei $\psi_i = 1/n$ (für i = 1, 2, …, n) seinen Maximalwert annimmt; H_{max} heißt auch maximale Entropie:

(15) $$H_{max}(\psi) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot \ln \left[\frac{1}{\frac{1}{n}} \right]$$

$$= \ln n \cdot \sum_{i=1}^{n} \psi_i$$

$$= \ln n.$$

In Ungleichheitsbetrachtungen entsprechen die ψ_i den Einkommensanteilen $\frac{Y_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$.

Bei vollständiger Gleichverteilung beträgt der Einkommensanteil für jede der n Untersuchungseinheiten 1/n, so dass H_{max} erreicht wird. Damit in diesem Fall die gemessene Ungleichheit gleich Null wird, wird beim Theil'schen Entropiemaß (T) die Differenz aus der maximalen und der tatsächlichen Verteilungsentropie zugrunde gelegt:

(16) $T = H_{max}(\psi) - H(\psi)$

[mit: T = Theilsches Entropiemaß; $H_{max}(\psi)$ = maximale Entropie; $H(\psi)$ = Entropie der Verteilung],

was letztlich zum folgenden Ausdruck führt:

(17) $$T = \ln n - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot \ln \frac{1}{\psi_i}$$

$$T = \frac{1}{n \cdot \mu} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i \cdot \ln Y_i) - \ln \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i \right].$$

Wie bereits skizziert, hat T bei vollständiger Gleichverteilung seinen Minimalwert in Höhe von Null. Bei (nahezu) vollständiger Ungleichverteilung würde – in einer Grenzbetrachtung – H gleich ln (1) = 0 und somit T gleich ln n sein.

Wegen der beim hier diskutierten Entropiemaß vorgenommenen Logarithmierung können nicht-positive Einkommenswerte analytisch allenfalls in einer Grenzwertbetrachtung mit dem Einkommensgrenzwert von Null für ($y_i \cdot \ln y_i$) Berücksichtigung finden.

Die für das Theil'sche Entropiemaß kennzeichnenden Einkommensanteile ($Y_i/n\mu$) werden von proportionalen Einkommensänderungen nicht beeinflusst, so dass T mit dem Prinzip der multiplikativen Invarianz vereinbar ist. Außerdem genügt T dem Transferprinzip.

Sensitivitätsanalytisch zeigte sich in vielen Fällen eine relativ starke Reaktion von T in Bezug auf Änderungen im oberen Verteilungsabschnitt.[7]

Übersicht 4:

Index	Formel	Minimum	Maximum	Transferprinzip	Invarianz	Bemerkungen
T	$T = \frac{1}{n \cdot \mu} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i \cdot \ln Y_i) - \ln \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i \right]$	0	ln n	Ja!	Multiplikativ	Berücksichtigung negativer Werte lediglich in Grenzwertbetrachtung möglich

Quelle: Eigene Zusammenstellung

[7] Im Unterschied zu T weist ein anderes Entropiemaß, welches als $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\mu}{Y_i}\right)$ definiert ist, eine besonders starke Sensitivität im unteren Verteilungsbereich auf.

4.4 Das Atkinson-Maß

Die bis dato präsentierten Ungleichheitskennziffern blendeten explizite Werturteile aus. Daher werden sie auch als positive Ungleichheitsmaße bezeichnet. Demgegenüber haben normative Indizes ausdrücklich wohlfahrtstheoretische Grundlagen. Dies gilt in der Regel in dem Sinne, dass die gesamtgesellschaftliche Wohlfahrt dann *maximal* ist, wenn die individuellen Einkommen vollständig *gleich* verteilt sind.

Die gesamtgesellschaftliche Wohlfahrt W ergibt sich als arithmetischer Mittelwert aus den individuellen Wohlfahrtsverläufen u_i:

(18) $$W = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} u(Y_i)$$

[mit: W = gesamtgesellschaftliche Wohlfahrt; n = Anzahl der Einkommensbezieher; u = individuelle Wohlfahrt; Y_i = Einkommen von Wirtschaftssubjekt i].

Aufbauend auf Ausdruck (18), resultiert die Höhe der gemessenen Einkommensungleichheit aus dem Wohlfahrtsverlust zwischen tatsächlicher und maximaler gesamtgesellschaftlicher Wohlfahrt.

Die bekannteste normative Ungleichheitskennziffer ist das Atkinson-Maß.[8]

Auf wohlfahrtstheoretischer Grundlage – insbesondere im Hinblick auf additiv-separable, identische individuelle Wohlfahrtsfunktionen – erhält man das Atkinson-Maß (A):

(19) $$A = 1 - \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$ *für* $\varepsilon \neq 1$;

[8] Vgl. hierzu Faik 1995, S. 308-311.

$$A = 1 - \exp\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{Y_i}{\mu}\right)\right] \quad \textit{für } \varepsilon = 1.$$

Im Falle von $\varepsilon = 0$ nimmt das Atkinson-Maß offenkundig den Wert Null an. Dies bringt eine gesellschaftliche Indifferenz gegenüber Einkommensungleichheit zum Ausdruck. Mit anderen Worten: Die gesamtgesellschaftliche Wohlfahrt hängt nur vom Gesamteinkommen, nicht aber von dessen Verteilung ab. Für $\varepsilon > 0$ hingegen reagiert A auf Umverteilungen. Je höher ε ist, desto größer sind die entsprechenden Sensitivitäten. Im Extremfall eines unendlich positiven ε findet eine gesellschaftliche Orientierung ausschließlich am Einkommen der am geringsten verdienenden Gruppe von Wirtschaftssubjekten statt. Der Parameter ε kann als Maß für die gesellschaftliche *Ungleichheitsaversion* angesehen werden.

Das Atkinson-Maß ist multiplikativ-invariant und genügt grundsätzlich, d. h. für $\varepsilon > 0$ dem Transferpostulat.

Diskutabel im Zusammenhang mit A, aber auch anderen normativen Ungleichheitsmaßen ist vor allem, ob die Addition der individuellen Wohlfahrtswerte zur Gesamtwohlfahrt sinnvoll ist.

Übersicht 5:

Index	Formel	Minimum	Maximum	Transferprinzip	Invarianz	Bemerkungen
A ($\varepsilon \geq 0$)	$A = 1 - \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ *für* $\varepsilon \neq 1$; $A = 1 - \exp\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{Y_i}{\mu}\right)\right]$ *für* $\varepsilon = 1$	0	$\varepsilon < 1$: 1 – [n {-ε/ (1–ε)}]; $\varepsilon \geq 1$: 1	Ja!	Multiplikativ	ε als Parameter der Ungleichheitssensitivität; Problem: Annahme additiv-separabler, identischer individueller Wohlfahrtsfunktionen

Quelle: Eigene Zusammenstellung

5. Ungleichheitsdekomposition

Von den vorstehend diskutierten Ungleichheitsmaßen lassen sich einige in eine Intergruppen- und eine Intragruppenkomponente der Ungleichheit zerlegen. Dies gilt z. B. für den (quadrierten sowie halbierten) Variationskoeffizienten oder für das Theil'sche Entropiemaß, nicht jedoch für den Gini-Koeffizienten.

Bei der Ungleichheitsdekomposition wird die Gesamtpopulation nach soziodemographischen Charakteristika in n Subgruppen aufgeteilt.

Mit Intergruppen-Ungleichheit ist die Ungleichheit zwischen den einzelnen Subgruppen und mit Intragruppen-Ungleichheit die zwischen den Teilgruppen im Sinne von Unterschieden in den Gruppenmittelwerten gemeint.

Je heterogener die Gruppen zusammengesetzt sind, desto höher ist naheliegenderweise der Anteil der Intragruppen-Ungleichheit an der gesamten gemessenen Ungleichheit und umgekehrt. Für vorgegebene Standardgruppen (nach Geschlecht, Erwerbs-, Familien- oder sozialem Status usw.) zeigt sich empirisch üblicherweise eine (deutliche) Dominanz des Intragruppen-Ungleichheitsanteils.

Eine allgemeine Klasse dekomponierbarer Ungleichheitsindizes stellt die Familie der Generalized-Entropy-Ungleichheitskennziffern GE dar:

(20) $$GE = \frac{1}{(\alpha^2 - \alpha)\cdot n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{Y_i}{\mu} \right)^{\alpha} - 1 \right] \quad \textit{für } \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1;$$

$$GE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\mu}{Y_i} \right) \quad \textit{für } \alpha = 0;$$

$$GE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{Y_i}{\mu} \cdot \ln \left(\frac{Y_i}{\mu} \right) \right] \quad \textit{für } \alpha = 1.$$

Analog zum Parameter ε des Atkinson-Maßes gibt beim GE-Index der Parameter α die gesellschaftlichen Ungleichheitsvorstellungen an. Ist $\alpha > 0$, so wird dem oberen Einkommensbereich ein besonderes Ungleichheitsgewicht zugewiesen, während im Falle $\alpha < 0$ das Augenmerk auf den unteren Einkommensbereich gerichtet ist.

Ist $\alpha = 0$, ergibt sich im Rahmen der GE-Familie das Ungleichheitsmaß der mittleren logarithmischen Abweichung, aus $\alpha = 1$ resultiert das Theil'sche Entropiemaß, und für $\alpha = 2$ erhält man den (durch Zwei dividierten quadratischen) Variationskoeffizienten.

GE lässt sich *additiv-linear* in eine Intra- und eine Intergruppen-Ungleichheitskomponente in folgender Weise zerlegen:

(21) $$GE = \sum_{g=1}^{G} v_g^{\alpha} \cdot w_g^{1-\alpha} \cdot GE_g + GE_B$$

Intragruppen-ungleichheit	Intergruppen-ungleichheit

Hierbei symbolisieren die w_g (= n_g/n) die Populationsanteile der einzelnen Bevölkerungssubgruppen g, v_g (= $w_g\ \mu_g/\mu$) den gruppenspezifischen Anteil am Gesamteinkommen [μ_g gibt den Einkommensmittelwert der Gruppe g an], und GE_g symbolisiert die Intragruppen-Ungleichheitskomponente und GE_B die Intergruppen-Ungleichheitskomponente des betreffenden GE-Indexes.

Hierbei ist GE_B folgendermaßen definiert:

(22) $$GE_B = \frac{1}{(\alpha^2 - \alpha)} \cdot \left\{ \left[\sum_{g=1}^{G} w_g \cdot \left(\frac{\mu_g}{\mu} \right)^{\alpha} \right] - 1 \right\} \quad \textit{für } \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1;$$

$$GE_B = \sum_{g=1}^{G} w_g \cdot \ln\left(\frac{\mu}{\mu_g}\right) \quad \textit{für } \alpha = 0;$$

$$GE_B = \sum_{g=1}^{G} v_g \cdot \ln\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right) \quad \textit{für } \alpha = 1.$$ [9]

6. Empirische Ungleichheitsberechnungen

Tabelle 1 enthält für ausgewählte Ungleichheitsindikatoren die auf Basis der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 2003 berechneten Werte für die Verteilung des Haushaltsbrutto- und des Haushaltsnettoäquivalenzeinkommens. Als Äquivalenzskala wurde die so genannte „alte OECD-Skala" zugrunde gelegt (Bezugsperson im Haushalt: 100 %, jedes weitere Haushaltsmitglied ab 15 Jahren: 70 %, jedes weitere Haushaltsmitglied bis einschließlich 14 Jahren: 50 %). Alle ausgewiesenen Werte deuten auf eine vergleichsweise moderate Einkommensungleichheit in Deutschland hin. Des Weiteren sind i. d. R. die Ungleichheitswerte für die Haushaltsbruttoäquivalenzeinkommen höher als diejenigen für die Haushaltsnettoäquivalenzeinkommen. Dies weist auf Umverteilungseffekte durch das bundesdeutsche Steuer-Transfer-System hin.

[9] Zu den vorstehenden Ausführungen im Allgemeinen bzw. zur Dekomposition eines GE-Maßes – des Theil'schen Entropiemaßes – im Besonderen vgl. Faik 1995, S. 326-330, und die dortigen Literaturhinweise.

Tabelle 1:

Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 2003, Gesamtdeutschland, Haushaltsbrutto- versus -nettoäquivalenzeinkommen (jeweils personengewichtet), alte OECD-Skala:

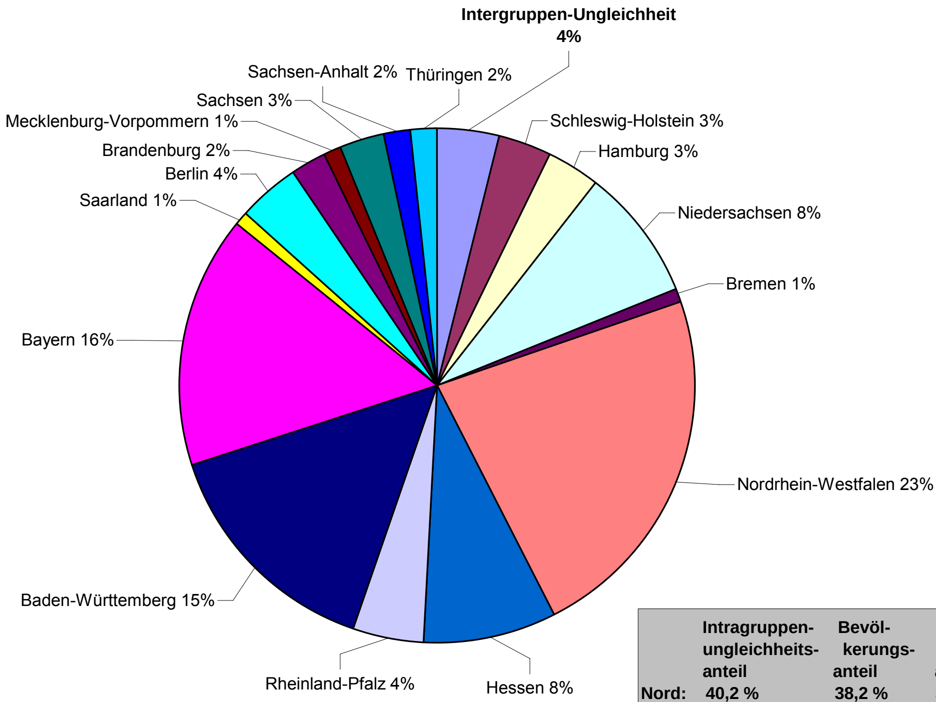
Ungleichheitsindikator	Y_b*	Y_n*
Gini-Koeffizient	0,2958	0,2721
Absolute Spannweite	229.940 €	207.420 €
Relative Spannweite	$1{,}1579 * 10^{-7}$	$1{,}3117 * 10^{-7}$
Quartilsabstand	14.730 €	10.545 €
Quartilsrelation	1,9748	1,8330
Durchschnittliche absolute Abweichung	10.358 €	7.532 €
Standardisierte durchschnittliche absolute Abweichung	0,2107	0,1923
Standardabweichung	14.867 €	11.119 €
Variationskoeffizient	0,6048	0,5678
Normierter Variationskoeffizient	0,1829	0,1612
Standardabweichung der logarithmierten Einkommen	0,5288	0,4797
Logarithmische Standardabweichung	0,5480	0,4947
Theil'sches Entropiemaß	0,1490	0,1287
Atkinson-Maß, $\varepsilon = 1$	0,1340	0,1140
Atkinson-Maß, $\varepsilon = 2$	0,2481	0,2121

Y_b*: Haushaltsbruttoäquivalenzeinkommen, Y_n*: Haushaltsnettoäquivalenzeinkommen
Quelle: Eigene Berechnungen

In den Abbildungen 4 und 5 sind Ungleichheitszerlegungen für Deutschland auf der gleichen datenbezogenen und methodischen Grundlage wie in Tabelle 1 an Hand der Beispiele Theil'sches Entropiemaß (Abbildung 4) und Normierter Variationskoeffizient (Abbildung 5) dargestellt, und zwar jeweils für die Haushaltsnettoeinkommen. Beispielhaft wurde nach Bundesländern disaggregiert. Es zeigt sich jeweils, dass die Intragruppenungleichheit – d. h. die Ungleichheit innerhalb der Bundesländer – mit insgesamt 96-97 % den überwältigenden Anteil der gesamten gemessenen Ungleichheit ausmacht.

Bei einer weiteren Gliederung nach nördlichen alten, südlichen alten Bundesländern sowie ostdeutschen Bundesländern zeigt sich, dass verglichen mit den Bevölkerungs- und Einkommensanteilen die Ungleichheitsanteile im Osten Deutschlands markant geringer sind. Dies deutet auf eine immer noch egalitärere Einkommensverteilung in Ostdeutschland hin.

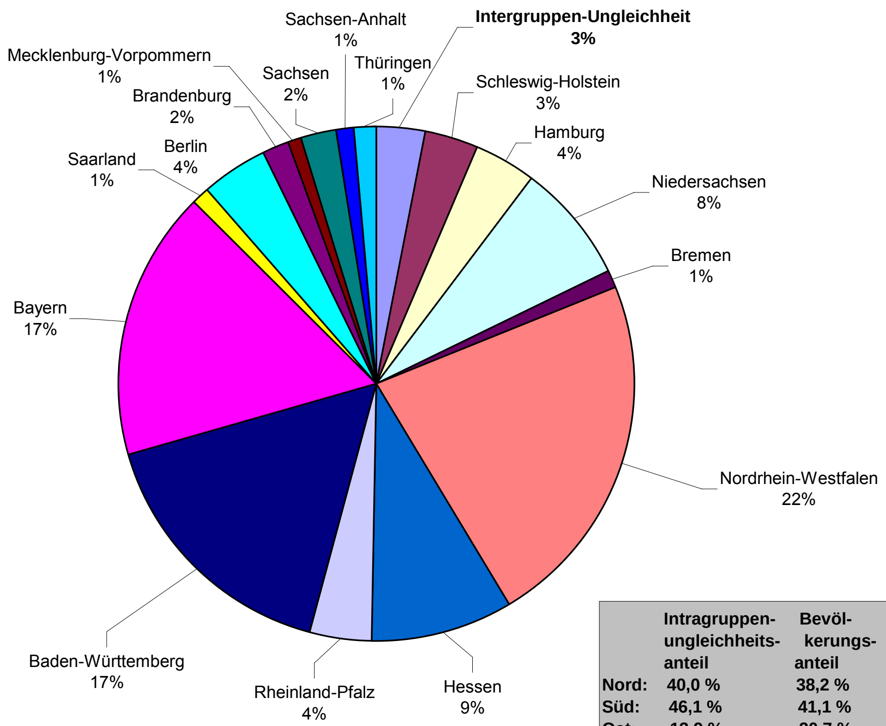
Abbildung 4:



	Intragruppen-ungleichheits-anteil	Bevöl-kerungs-anteil	Einkom-mens-anteil
Nord:	**40,2 %**	**38,2 %**	**38,6 %**
Süd:	**45,9 %**	**41,1 %**	**43,3 %**
Ost:	**13,9 %**	**20,7 %**	**18,1 %**

Quelle: Eigene Berechnungen

Abbildung 5:



	Intragruppen-ungleichheits-anteil	Bevöl-kerungs-anteil	Einkom-mens-anteil
Nord:	**40,0 %**	**38,2 %**	**38,6 %**
Süd:	**46,1 %**	**41,1 %**	**43,3 %**
Ost:	**13,9 %**	**20,7 %**	**18,1 %**

Quelle: Eigene Berechnungen

7. Schlussbetrachtung

Lassen Sie mich nun bitte zu meiner Schlussbetrachtung kommen! Es wurden verschiedene Ungleichheitsmaße vorgestellt. An Hand mehrerer Kriterien – genau gesagt: an Hand des Ungleichheits-Axiomensystems – wurde dargelegt, dass die einzelnen Maße explizit oder implizit unterschiedliche normative Implikationen haben. Empirisch zeigten sich für Gesamtdeutschland auf Basis der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 2003 keine extremen Werteausprägungen der einzelnen Ungleichheitsindizes. Dabei dominierte die Intragruppen- die Intergruppenkomponente der Ungleichheit (klar). Des Weiteren zeigten sich Indizien für nennenswerte Umverteilungswirkungen durch das bundesdeutsche Steuer-Transfer-System.

Literaturhinweise (mit entsprechenden weiterführenden Literaturverweisen):

- *Faik, J.:* Äquivalenzskalen. Theoretische Erörterung, empirische Herleitung und verteilungsbezogene Anwendung für die Bundesrepublik Deutschland, Berlin 1995.
- *Faik, J.:* Grundlagen der Volkswirtschaftslehre. Eine Einführung in die Volkswirtschaftslehre für ökonomisch Interessierte, Berlin 2006.
- *Faik, J.:* Elementare Wirtschaftsstatistik, Berlin 2007.